FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

EPGE

Escola de Pós-Graduação em Economia

Ensaios Econômicos

Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas

N° 342 ISSN 0104-8910

Projetos Com Mais de Duas Variações de Sinal e o Critério da Taxa Interna de Retorno

Clovis de Faro, Paula de Faro

Fevereiro de 1999

URL: http://hdl.handle.net/10438/583

de Faro, Clovis
Projetos Com Mais de Duas Variações de Sinal e o Critério da Taxa Interna de Retorno/ Clovis de Faro, Paula de Faro - Rio de Janeiro : FGV,EPGE, 2010
(Ensaios Econômicos; 342)

Inclui bibliografia.

CDD-330

PROJETOS COM MAIS DE DUAS VARIAÇÕES DE SINAL E O CRITÉRIO DA TAXA INTERNA DE RETORNO

Clovis de Faro[1] e Paula de Faro[2]

Fevereiro de 1999

[1] Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas
[2] BARRA Inc.

1. Introdução

Dado o que se denomina de projeto de investimento, caracterizado pela seqüência de números reais $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, chamada de fluxo de caixa e onde $a_0 < 0$ denota o investimento inicial, a_j é a receita líquida no j-ésimo período da vida econômica n, para $j = 1, 2, ..., n$, com $a_n \neq 0$, sendo i uma taxa de juros cujo período coincida com o do fluxo de caixa, a correspondente função valor atual é definida como :

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j}, \; i > -1 \tag{1}$$

Nestas condições, diz-se que i^* é uma taxa interna de retorno do projeto, se anular a função valor atual; isto é, se $V(i^*) = 0$.

Por outro lado, sendo r uma taxa de juros exogenamente fornecedida, tomada como de comparação e que costuma ser chamada de taxa (mínima) de atratividade (cf. Bierman e Smidt (1993) e Grant e Ireson (1964)) ou de custo de capital (cf. Bodie e Merton (1998) e Luenberger (1998)), livros textos, por exemplo Bierman e Smidt (1993) e Luenberger (1998), costumam apresentar a seguinte regra de avaliação: implemente o projeto se sua taxa interna de retorno for superior à r .

Ora, e isto nem sempre é devidamente observado, a correta aplicação da regra acima, dita critério da taxa interna de retorno, requer que três condições sejam verificadas: existência de taxa interna; unicidade; e um resultado de avaliação que seja consistente com o obtido segundo o mais bem conceitualmente fundamentado (vide, por exemplo, Ross, Westerfield e Jaffe (1993)), método do valor atual (à mesma taxa r e que prescreve a implementação do projeto se $V(r)>0$).

Provavelmente, a razão pela qual as condições apontadas não são usualmente abordadas, deve-se ao fato de que a maioria dos projetos de investimento que são encontrados na prática são do que se denomina do tipo convencional; isto é, caracterizam-se pela presença de exatamente uma mudança de sinal no correspondente fluxo de caixa. Em tal situação, típica de empreendimentos em que a etapa de desembolsos líquidos (fase de investimento) é seguida somente da etapa de resultados positivos (fase de retorno), a regra de avaliação mencionada pode ser aplicada sem sobressaltos. Isto é, pode-se demonstrar (cf. de Faro (1974)) que, para a classe de projetos convencionais, as três condições de aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno são trivialmente verificadas.

Entretanto, como apontado nos trabalhos pioneiros de Lorie e Savage (1955) e de Hirshleifer (1958), existem várias situações onde os projetos são não-convencionais; isto é, apresentam mais de uma variação de sinal nos respectivos fluxos de caixa. Em tais casos, que ocorrem, por exemplo, em projetos de exploração de minas a céu aberto e em investimentos em usinas nucleares, onde a fase de retorno é respectivamente seguida de gastos com reposição do meio ambiente e eliminação de resíduos radioativos , e que podem também surgir quando da comparação entre projetos ditos mutuamente exclusivos, via o emprego da extensão do conceito de taxa interna denominada de taxa fisheriana de retorno sobre os custos (cf. Alchian (1955)), as condições necessárias nem sempre são atendidas.

A possibilidade de colapso do critério da taxa interna de retorno provocou uma intensa busca de condições de suficiência para sua aplicabilidade. Assim, começando com Soper (1959), podemos destacar as contribuições de Kaplan (1965), Teichroew, Robichek e Montalbano (1965), Bernhard (1967), Jean (1968), Norstrom (1972), Hammond (1974), Aucamp e Eckardt (1976), de Faro (1975 e 1978), de Faro e Soares (1978), Bernhard (1979 e 1980), Pratt e Hammond (1979), Dybvig (1983) e Bezza (1984; posteriormente discutida em

Jegers (1986) e Lonzi (1988)). Dentre estas, por suas respectivas simplicidades, já que fazem uso tão somente de adições dos fluxos de caixa, sobressaem as que se baseiam nas chamadas funções de Polya, caso dos trabalhos de Hammond (1974) e de Pratt e Hammond (1979, alternativamente fundamentado em Pratt (1979)), e as que podem ser explicadas a partir de um teorema devido a Vincent (originalmente publicado em 1836 e cuja demonstração pode ser encontrada em Uspensky (1948)), como as de de Faro (1978) e de Bernhard (1979 e 1980).[1]

No que se segue, buscando formalizar e estender o anteriormente apresentado em de Faro (1983 e 1985), iremos nos deter no exame da vertente derivada da aplicação do Teorema de Vincent. No processo, iremos também buscar uma comparação com o procedimento de Pratt e Hammond, mostrando como, analogamente ao caso das chamadas diagonais de Vincent, podemos considerar extensões de sua aplicação.

2. **Propriedades da Função Valor Futuro**

Define-se a chamada função valor futuro associada a um projeto de investimento como :

$$F(i) = (1+i)^n \; V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j \; (1+i)^{n-j}, \; i > -1 \qquad (2)$$

Logo, alternativamente, podemos dizer que um particular valor de i, que denotamos por i*, é uma taxa interna de retorno do projeto se anular sua função valor futuro.

Regra geral, ao menos antes de levar em conta, ex post, efeitos de eventual inflação, só se trabalha com taxas de juros positivas. Ora, limitando a análise a este campo de interesse

[1] Na verdade, o trabalho original de Bernhard (1979), que apresentou uma condição de suficiência idêntica à proposta por de Faro (1978), foi independentemente desenvolvido por um caminho alternativo em que se fez uso da condição de Soper

prático, a condição de que se tenha lucro contábil positivo, isto é, $\sum_{j=0}^{n} a_j > 0$, passa a ser necessária, mas ainda não suficiente, para que se possa aplicar o critério de avaliação segundo a taxa interna de retorno.[1] No que se segue, supondo que tal condição esteja presente, teremos a bonificação de que fica assegurada a existência de taxa interna de retorno positiva. Ainda mais, uma vez assegurada sua unicidade, fica automaticamente garantida a questão de consistência com o critério do valor atual.

A razão de trabalhar-se com a função valor futuro, e não com a função valor atual, é que a primeira pode ser facilmente escrita como um polinômio em i, cujos coeficientes são os termos do que se denomina de (primeira) diagonal de Vincent. Deste modo, analogamente à justificativa para a unicidade da taxa interna de retorno no caso de projetos convencionais, com base na bem conhecida Regra de Sinais de Descartes, conclui-se que também haverá unicidade da taxa interna se houver exatamente uma variação de sinal na (primeira) diagonal de Vincent.

Denotando-se por D_d a (primeira) diagonal de Vincent, também chamada de primeira diagonal à direita, temos que esta é formada pela seguinte seqüência de acumulações do fluxo de caixa:

$$D_d = \left\{A_0^{(n+1)}, A_1^{(n)}, ..., A_{n-1}^{(2)}, A_n^{(1)}\right\} \tag{3}$$

onde $A_k^{(\ell)}$ é o termo de ordem k (k = 0, 1, ..., n) da ℓ-ésima acumulação (ℓ = 1, 2, ...), construído de modo que [1]

(1959).

[1] Caso contrário, desprezando o caso limite de lucro contábil nulo, se $\sum_{j=0}^{n} a_j < 0$, como $\lim_{i\to\infty} V(i) = a_0 < 0$, ter-se-ia ou ausência de taxa interna ou mais de uma, ou ainda, no caso extremo de unicidade, a questão de inconsistência.

[1] Procedendo-se por indução, é fácil verificar que

$$A_k^{(\ell)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{\ell + k - j - 1}{k - j} a_j, \; k = 0, 1, ..., n \quad e \quad \ell = 1, 2, ...$$

$$A_k^{(\ell)} = \begin{cases} a_0, k = 0 \text{ e } \ell = 1,2,\ldots \\ \sum_{j=0}^{k} a_j, k = 1,2\ldots,n \text{ e } \ell = 1 \\ A_{k-1}^{(\ell)} + A_k^{(\ell-1)}, k = 1,2,\ldots,n \text{ e } \ell = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{4}$$

A justificativa para o fato de que a presença de exatamente uma variação de sinal em D_d garante a unicidade de uma taxa interna de retorno positiva, para um projeto de investimento com lucro contábil positivo, pode ser encontrada em um método de separação das raízes de polinômios, que foi originalmente proposto por Vincent (cf. Uspensky (1948)). No que se segue, buscando tornar a apresentação auto-contida, consideraremos aqui uma variante, mais simples, da demonstração desenvolvida por Bernhard (1979).

Lema 1

A função valor futuro pode ser escrita como:

$$F(i) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{(k+1)} i^k \tag{5}$$

Demonstração

Fazendo-se uso do binômio de Newton, tem-se que:

$$F(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} i^k$$

Logo, promovendo a (algo tediosa mas trivial) coleta dos termos que sejam coeficientes de cada uma das potências de i, decorre que:

$$F(i) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \right\} i^0 + \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j}{1} a_j \right\} i^1 + \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-j}{2} a_j \right\} i^2$$

$$+\ldots+\left\{\sum_{j=0}^{1}\binom{n-j}{n-1}a_j\right\}i^{n-1}+\left\{\sum_{j=0}^{0}\binom{n-j}{n}a_j\right\}i^{n}$$

Portanto, observando-se que

$$A_{n-k}^{(k+1)}=\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-j}{n-k-j}a_j=\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-j}{k}a_j\ ,\ \ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

tem-se:

$$F(i)=A_n^{(1)}+A_{n-1}^{(2)}\,i+A_{n-2}^{(3)}\,i^2+\ldots+A_1^{(n)}\,i^{n-1}+A_0^{(n+1)}\,i^n$$

c.q.d.

Ou seja, como anteriormente mencionado, a função valor futuro pode ser escrita como um polinômio em i, cujos coeficientes são exatamente os termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d. Deste modo, fazendo-se uso da Regra de Sinais de Descartes (cf. Uspensky (1948)), segue-se que o projeto em questão apresentará exatamente uma taxa interna de retorno positiva se tivermos não mais do que uma variação de sinal em D_d.[1]

Como ilustração tanto do resultado acima, como também do processo de construção de D_d, consideremos o seguinte projeto de investimento:

$$A:\{-10,\ 20,\ 20,\ -80,\ 50,\ 100\}$$

Notando que o projeto denominado A apresenta 3 variações de sinal em seu fluxo de caixa, os termos da correspondente (primeira) diagonal de Vincent podem ser facilmente obtidos por acumulações sucessivas, tal como indicado no Quadro I.

---

[1] Observe-se que como $A_0^{(n-1)}=a_0<0$ e, por suposto, $A_n^{(1)}=\sum_{j=0}^{n}a_j>0$, teremos sempre ao menos uma variação de sinal em D_d. Observe-se também que, nas condições consideradas, é fácil verificar que tanto projetos

Quadro I

Construção de D_d para o Projeto A

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & \{-10, & 20, & 20, & -80, & 50, & 100\} \\
\ell = 1: & -10, & 10, & 30, & -50, & 0, & \underline{100} \\
\ell = 2: & -10, & 0, & 30, & -20, & -\underline{20} & \\
\ell = 3: & -10, & -10, & 20, & \underline{0} & & \\
\ell = 4: & -10, & -20, & \underline{0} & & & \\
\ell = 5: & -10, & -\underline{30} & & & & \\
\ell = 6: & -\underline{10} & & & & &
\end{array}
$$

Do Quadro I, considerando os elementos sublinhados, que formam efetivamente uma diagonal, e tendo em vista a orientação indicada pela seta, vemos que D_d ={-10, -30, 0, 0, -20, 100}. Como o número de variações de sinal em D_d, indicado por Sinal{D_d}, é igual a 1, conclui-se que ao projeto A, que é não-convencional e com 3 variações de sinal em seu fluxo de caixa, associa-se uma única taxa interna de retorno positiva (que é aproximadamente igual a 116, 49% por período).[1]

3. **Extensão: Ramificação da (Primeira) Diagonal de Vincent**

convencionais como aqueles com duas variações de sinal no fluxo de caixa, que são ditos do tipo Jean, apresentam exatamente uma variação de sinal em D_d.

[1] É interessante notar que, como anteriormente discutido em de Faro (1978, 1983 e 1985) a presença de exatamente uma variação de sinal na primeira cumulação (o que caracteriza o resultado de Norstrom (1972)) ou, o que é mais forte, de não mais do que uma variação na segunda cumulação (o que corresponde ao resultado dito da seqüência ξ de de Faro (1978)), implica em exatamente uma variação de sinal em D_d.

Como visto na seção precedente, a presença de exatamente uma variação de sinal em D_d, resultado conhecido na literatura como condição de Bernhard-de Faro (cf.Bernhard (1980), Clarke (1982), Russel e Rickard (1982), Hajdasinski (1983) e Jegers (1986)), é condição suficiente para a correta avaliação de um projeto de investimento segundo o critério da taxa interna de retorno. No entanto, como ilustrado no caso do projeto B: {-10, 20, -50, 150, -200, 200}, que apresenta 5 variações de sinal, o fato de que D_d: {-10, -30, -70, 20, -20, 110} possua 3 variações de sinal (ou seja, não é satisfeita a condição de Bernhard- de Faro) não implica em que não se possa usar o critério da taxa interna de retorno.[1] Isto porque, como iremos mostrar, ao projeto B corresponde uma única taxa interna de retorno (cujo valor exato é i^*= 100% por período). Ou seja, a condição de Bernhard- de Faro é suficiente; mas não necessária.

Dado que a condição é não necessária, torna-se relevante que, mantida a simplicidade computacional baseada em adições, seja buscado um refinamento do procedimento. Ora, como já anteriormente mencionado em de Faro (1978) e explicitado em trabalhos posteriores (cf. Clarke (1982), Hajdasinski (1983), de Faro (1983) e Russel e Rickard (1984)), é suficiente fazer uso do que já havia sido prescrito pelo próprio Vincent. Isto é, como indicado em Uspensky (1948), basta construir, com base em mudanças sucessivas de variáveis, diagonais de Vincent da própria (primeira) diagonal D_d. No que se segue, apresentando uma justificativa formal e detalhada para o caso do primeiro nível de extensão,[2] a qual pode ser facilmente aplicada aos níveis subseqüentes, iremos mostrar como isto pode ser feito de uma maneira eficiente.

Para a justificativa do procedimento, faremos uso dos seguintes resultados.

---

[1] Alternativamente, a unicidade pode ser comprovada, por exemplo, fazendo-se uso do algorítmo para aplicação do Teorema de Sturm (cf. Kaplan (1965) como apresentado em Panton e Verdini (1981) e, em uma linguagem computacional mais moderna, em P. de Faro (1998).

[2] Originalmente desenvolvida em P. de Faro (1998), o correspondente procedimento é apresentado sob forma de programa computacional com o uso da planilha eletrônica EXCEL.

Lema 2 (Hajdasinski (1983)).

Qualquer condição de suficiência para a unicidade de taxas internas de retorno positivas de um pro

jeto de investimento $\{a_0, a_1,...,a_n\}$, é também válida para a unicidade de taxas internas de retorno negativas do correspondente projeto reverso $\{a_n, a_{n-1},...,a_0\}$.

Demonstração.

Sendo i>-1 uma taxa de juros, defina-se a variável y de modo que

$$i = (1+y)^{-1}-1 = -y(1+y)^{-1} \Rightarrow y = -i(1+i)^{-1}$$

(6)

Tem-se que:

$$\lim_{i\to -1} y = \infty; \lim_{i\to\infty} y = -1; \text{ e } \ y = 0 \Leftrightarrow i = 0$$

Ou seja, a variável y assume valores no mesmo campo de definição que i; podendo, pois, ser também interpretada como uma taxa de juros. Sendo que, a valores positivos de i correspondem valores negativos de y; e vice-versa.

Trabalhando-se com a variável y, a função valor atual do projeto em questão pode ser escrita como:

$$G(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+y)^j = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} (1+y)^{n-k} \quad , \ y > -1$$

(7)

Por outro lado, considerando o projeto reverso e trabalhando-se ainda com a variável y, temos que sua correspondente função valor atual é:

$$H(y)= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(1+y)^{-k} \quad , \; y > -1$$

(8)

Comparando-se as expressões (7) e (8), segue-se que a função valor atual, em termos da taxa i, do projeto original, é tal que:

$$V(i) \equiv G(y) = (1+y)^n H(y), \; i > -1 \;\; e \;\; y > -1$$

(9)

Logo, como V(i) somente se anula se H(y) também for nula, e reciprocamente, e como $y>0 \Rightarrow i \in (-1,0)$, segue-se que o número de taxas internas de retorno negativas do projeto original coincide com o número de taxas internas de retorno positivas do projeto reverso.

c.q.d.

Como corolário imediato dos Lemas 1 e 2, segue-se que a ausência de variações de sinal na (primeira) diagonal de Vincent do projeto reverso (que chamaremos de primeira diagonal à esquerda do projeto original, e que denotaremos por D_e), indica a inexistência de taxa interna de retorno negativa para o projeto original.

Assim, por exemplo, no caso do projeto A, como Sinal $(D_e)=0$, segue-se que a unicidade da taxa interna $i^* \cong 116{,}49\%$ por período, estende-se a todo campo de taxas de juros com significação econômica (definido por $i>-1$).[1]

Lema 3

Denote-se por D_{de} a diagonal de Vincent formada a partir do reverso de D_d (alternativamente, dizemos que D_{de} é a diagonal à esquerda da primeira diagonal à direita). O

[1] Note-se que, na realidade, não há a necessidade da construção total de D_e. A ausência de variação de sinal, logo na primeira cumulação, indica que Sinal $(D_e)=0$.

número de variações de sinal em D_{de} provê um limite superior para o número de taxas internas positivas inferiores a 100% por período, para o projeto de investimento original.

Demonstração.

Partindo da expressão (5), determinada no Lema 1, e considerando a variável auxiliar $t > -1$ tal que $i = (1+t)^{-1}$, segue-se que:

$$F(i) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\text{-}k}^{(k+1)} \; i^k = 0 \Leftrightarrow B(t) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\text{-}k}^{(k+1)} (1+t)^{n-k} = 0$$

(10)

Ou seja, observando que B(t) pode ser interpretada como a função valor futuro associada ao "projeto" (dito de financiamento pois que $A_n^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} a_j > 0$) cuja seqüência de fluxos de caixa líquidos é formada pelo reverso de D_d, segue-se que $i^*>0$ é uma taxa interna de retorno do projeto de investimento original, somente se $t^*=(1- i^*)/ i^*$ for "taxa interna de retorno" do reverso de D_d.

Ora, procedendo da mesma maneira que no caso da demonstração do Lema 1 (isto é, desenvolvendo $(1+t)^{n\text{-}k}$ segundo o binômio de Newton, e colecionando os coeficientes de termos de mesma potência de t), pode-se verificar que:

$$B(t) = \sum_{\ell=0}^{n} C_{n\text{-}\ell}^{(\ell+1)} \; t^{\ell}$$

(11)

onde

$$C_{n\text{-}\ell}^{(\ell+1)} = \sum_{j=0}^{n\text{-}\ell} \binom{n - j}{\ell} A_{n\text{-}j}^{(j+1)} \qquad (12)$$

Ou seja, face à Regra de Sinais de Descartes, o número de "taxas internas de retorno" *positivas* do "projeto" construído a partir do reverso de D_d, não excede ao número de variações de sinal em sua correspondente (primeira) diagonal de Vincent; $D_{de} = \left\{C_n^{(1)}, C_{n-1}^{(2)}, \ldots, C_0^{(n+1)}\right\}$.

Ora, como $t = 0 \Rightarrow i = 1$ e $\lim_{t\to\infty} i = 0$, decorre de (10) que o número de taxas internas de retorno no intervalo (0,1), para o projeto de investimento original, não excede o número de variações de sinal em D_{de}.

c.q.d.

Corolário 1

Se for nula a soma dos termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d, temos que i^*=100% por período é uma taxa interna de retorno do projeto de investimento original.[1]

Demonstração

Tendo em vista (11), temos que B(0) = 0 se e somente se $C_n^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} A_{n-j}^{(j+1)} = 0$.

c.q.d.

Por outro lado, trabalhando-se diretamente com D_d (ou seja, com o reverso do reverso de D_d), temos o seguinte resultado:

Lema 4

O número de taxas internas de retorno maiores do que 100% por período, para o projeto de investimento original, não excede ao número de variações de sinal em D_{dd} (que é a

[1] Ainda mais, se for também nulo o termo $C_{n-1}^{(2)}$, a taxa interna i^*=1 terá multiplicidade igual a 2. E, se além disso, $C_{n-2}^{(3)}$ =0, a multiplicidade será igual a 3; e assim por diante.

(primeira) diagonal de Vincent de D_d, também dita diagonal à direita da primeira diagonal à direita).

Demonstração

Lançando mão da variável auxiliar z tal que i = 1+z, o que implica em que se tenha i = 1 para z = 0 e i→∞ quando z→∞, decorre da expressão (5) que:

$$F(i) = 0 \Leftrightarrow L(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{(k+1)} (1+z)^k = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{(k+1)} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} z^{\ell} = 0 \tag{13}$$

Ora, colecionando os termos de mesma potência de z, temos que:

$$L(z) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k} A_{n-\ell}^{(\ell+1)} \right\} z^{\ell} \tag{14}$$

Como F(i) se anula se, e somente se, L(z) também for nula, segue-se da Regra de Sinais de Descartes que o número de taxas internas de retorno, maiores do que a unidade, do projeto de investimento original, não excede o número de variações de sinal na seqüência $\left\{ A_0^{(n+1)}, nA_0^{(n+1)} + A_1^{(n)}, \ldots, \sum_{\ell=1}^{n} \binom{\ell}{1} A_{n-\ell}^{(\ell+1)}, \sum_{\ell=0}^{n} A_{n-\ell}^{(\ell+1)} \right\}$, cujos termos formam a diagonal à direita de D_d.

c.q.d.[1]

Consolidando os Lemas 3 e 4, bem como o Corolário 1, temos, com demonstração trivial, o:

Teorema

Pode-se assegurar a correta aplicação do critério da taxa interna de retorno, para um projeto de investimento com lucro contábil positivo, se exatamente uma das três seguintes possibilidades for verificada:

---

[1] A demonstração apresentada objetivou justificar o procedimento baseado em mudanças de variável, originalmente proposto por Vincent (cf. Uspensky (1948)). Alternativamente, o resultado decorre diretamente da aplicação do Lema 3 ao Lema 2.

1) Sinal (D_{de})=1, Sinal (D_{dd})=0 e $\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}^{(j+1)} \neq 0$, com a única (e simples) taxa interna de retorno positiva sendo inferior a 100% por período;

2) Sinal (D_{de}) = 0, Sinal (D_{dd}) = 1 e $\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}^{(j+1)} \neq 0$, com a única (e simples) taxa interna de retorno positiva sendo superior a 100% por período;

3) Sinal (D_{de})= Sinal (D_{dd})=0 e $\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}^{(j+1)} = 0$, com a única (e simples se $\sum_{\ell=1}^{n} \binom{\ell}{1} A_{n-\ell}^{(\ell+1)}$, que é o penúltimo termo de D_{dd}, for diferente de zero) taxa interna de retorno positiva exatamente igual a 100% por período.

Como exemplo de aplicação do resultado acima, retomemos o caso do exemplo B, para o qual D_d={-10, -30, -70, 20, -20, 110}.

Construindo, como indicado no Quadro II, a partir de cumulações para a frente e para trás, respectivamente as diagnonais D_{dd} e D_{de} , tem-se:[1]

Quadro II

Contrução de D_{dd} e de D_{de} para o Projeto B

$$
\begin{array}{rl}
, \underline{110} & : \ell=6 \\
\underline{530}, 110 & : \ell=5 \\
\underline{1040}, 420, 110 & : \ell=4 \\
\underline{970}, 620, 310, 110 & : \ell=3 \\
\underline{360}, 350, 310, 200, 110 & : \ell=2 \\
\underline{0}, 10, 40, 110, 90, 110 & : \ell=1
\end{array}
$$

D_d: {-10, -30, -70, 0, -20, 110 }

ℓ=1: -10, -40,-110, -90,-110, $\underline{0}$

ℓ=2: -10, -50,-160, -250,-$\underline{360}$

ℓ=3: -10, -60,-220, -$\underline{470}$

ℓ=4: -10, -70,-$\underline{290}$

ℓ =5: -10, -<u>80</u>

ℓ =6: -<u>10</u>

D_{dd}= {-10, -80, -290, -470, -360, 0} e D_{de}= {110, 530, 1040, 970, 360, 0}. Logo, como Sinal (D_{dd})= Sinal (D_{de})=0 e é nula a soma dos termos de D_d, segue-se que a única taxa interna de retorno positiva do projeto B é exatamente igual a 100% por período.

Observe-se, ainda, que, por outro lado, pode-se concluir que o critério da taxa interna de retorno não é aplicável (por haver mais de uma taxa interna de retorno positiva) se:

a) houver, simultaneamente, variação de sinal em D_{dd} e em D_{de};

b) havendo variação de sinal em D_{dd} ou em D_{de}, for nula a soma dos termos de D_d.

Caso contrário, havendo somente variação de sinal em D_{dd} ou em D_{de}, e não sendo nula a soma dos termos de D_d, ainda existe a possibilidade de haver uma única taxa interna de retorno positiva. Deste modo, sugere-se que, como discutido na próxima seção se continue estendendo o procedimento de construção de novas diagonais.

Como ilustração de um caso onde seria necessário prosseguir com o procedimento, temos o projeto C: {-1, 11, -42, 56}, anteriormente apresentado em Hajdasinski (1983).

É fácil verificar que D_d : {-1, 8, -23, 24}, D_{de} = {24, 49, 34, 8} e D_{dd} = {-1, 5, -10, 8}. Logo, como Sinal (D_{de}) = 0, Sinal (D_{dd}) = 3 e não é nula a soma dos termos de D_d, a análise é inconclusiva; o que nos remete a passar ao próximo nível de extensão.

4. **<u>Extensões Adicionais</u>**

Chamando a atenção para o fato de que a justificativa formal, para cada nível de extensão, pode ser efetuada usando o mesmo caminho apresentado na seção precedente, iremos nos limitar aqui a apresentar, de uma maneira sucinta, como proceder na construção de níveis adicionais de extensão.

---

[1] A rigor, no caso em questão, o processo poderia ser interrompido logo na primeira cumulação (tanto para trás, como para

O princípio básico, tal como apresentado em Uspensky (1948, pgs. 127-36), é fazer

sucessivas mudanças de variáveis. De uma maneira geral, sendo m a variável associada à uma dada diagonal, construa-se as suas correspondentes diagonais à direita e à esquerda. À diagonal à direita associa-se a variável não-negativa j tal que $m = 1 + j$; por outro lado, para o caso da diagonal à esquerda, j é tal que $m = 1 / (1 + j)$. Para a determinação do intervalo que, em termos de taxas de juros, corresponde à diagonal em questão, basta, tendo presente a seqüência de transformações, fazer $j = 0$ e $j \to \infty$.

Partindo-se da expressão (10), que exprime a função valor futuro como um polinômio em i, cujos coeficientes são os termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d, a regra geral acima descrita implica em que:

a) diagonal à direita: D_{dd}

$$i = m = 1 + j \Rightarrow i \in (1, \infty)$$

b) diagonal à esquerda: D_{de}

$$i = m = 1 / (1 + j) \Rightarrow i \in (0, \infty)$$

Por seu lado, partindo de D_{dd}, tem-se:

a) diagonal à direita: D_{ddd}

$$\left.\begin{array}{l} i = 1 + m \\ m = 1 + j \end{array}\right\} \Rightarrow i = 2 + j \Rightarrow i \in (2, \infty)$$

b) diagonal à esquerda: D_{dde}

$$\left.\begin{array}{l} i = 1 + m \\ m = 1 / (1 + j) \end{array}\right\} \Rightarrow i = 1 + 1 / (1 + j) \Rightarrow i \in (1, 2)$$

Similarmente, partindo-se de D_{de}, tem-se:

a) diagonal à direita: D_{ded}

---

frente), já que não se tem variação de sinal.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{i} = 1/(1+m) \\ m = 1+j \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{i} = 1/(2+j) \Rightarrow \mathrm{i} \in (0,\ 1/2)$$

b) diagonal à esquerda: D_{dee}

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{i} = 1/(1+m) \\ m = 1/(1+j) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{i} = 1/[1+1/(1+j)] \Rightarrow \mathrm{i} \in (1/2,\ 1)$$

Prosseguindo-se até o 4º nível de extensão,[1] são descritos nas Figuras I e II os intervalos respectivamente associados às ramificações de D_{de} e D_{dd}.

Para o caso do projeto C, vimos que Sinal (D_{dd}) = 3, o que indica até 3 taxas internas de retorno superiores a 100% por período. Prosseguindo com a análise, a partir de D_{dd}, tem-se que Sinal (D_{dde}) = Sinal ({8, 14, 9, 2}) = 0, o que indica que não existe taxa interna de retorno no intervalo (1, 2). Além do mais, como não é nulo o último termo de D_{dde}, indicando não ser nula a soma dos termos de D_{dd}, temos que o ponto de fronteira, no caso i = 2, também não é taxa interna.[2]

Por outro lado, como Sinal (D_{ddd}) = Sinal ({-1, 2, -3, 2}) = 3, indicando-se até 3 taxas internas superiores a 200% por período, devemos prosseguir com a análise. Como Sinal (D_{ddde}) = Sinal ({2, 3, 2, 0}) = 0, conclui-se que não existe taxa interna no intervalo (2,3); e, ainda mais, por ser nulo o último termo de D_{ddde}, temos que 300% por período é taxa interna. Sendo que a taxa interna i* = 3 é única, pois que, como Sinal (D_{dddd}) = Sinal ({-1, -1, -2, 0}) = 0, não existe taxa interna superior a 300% por período.

Embora, do ponto de vista teórico, à exceção do caso onde a taxa interna de retorno é única, mas múltipla e irracional (quando teremos sempre diagonais com um número de variações de sinal não inferior à multiplicidade da taxa interna) o método possa ser estendido até que se conclua a existência de mais de uma taxa interna ou a existência de uma única taxa interna (cujo valor exato, sendo um número racional, pode ser precisamente

[1] Em de Faro (1985), apresentam-se os correspondentes intervalos até o 5º nível de extensão.
[2] Esta conclusão deriva do fato de que, analogamente ao visto no caso do primeiro nível de extensão, a função valor futuro, escrita a partir da variável φ tal que i = 1 + 1/(1+φ), apresenta como termo independente o último termo de D_{dde}.

determinado), não se recomenda, na prática, um número muito grande de níveis de extensão. Isto devido ao fato de que as cumulações sucessivas podem atingir, rapidamente, valores muito grandes.

Figura I

Árvore de Níveis de Extensão a Partir de D_{de}

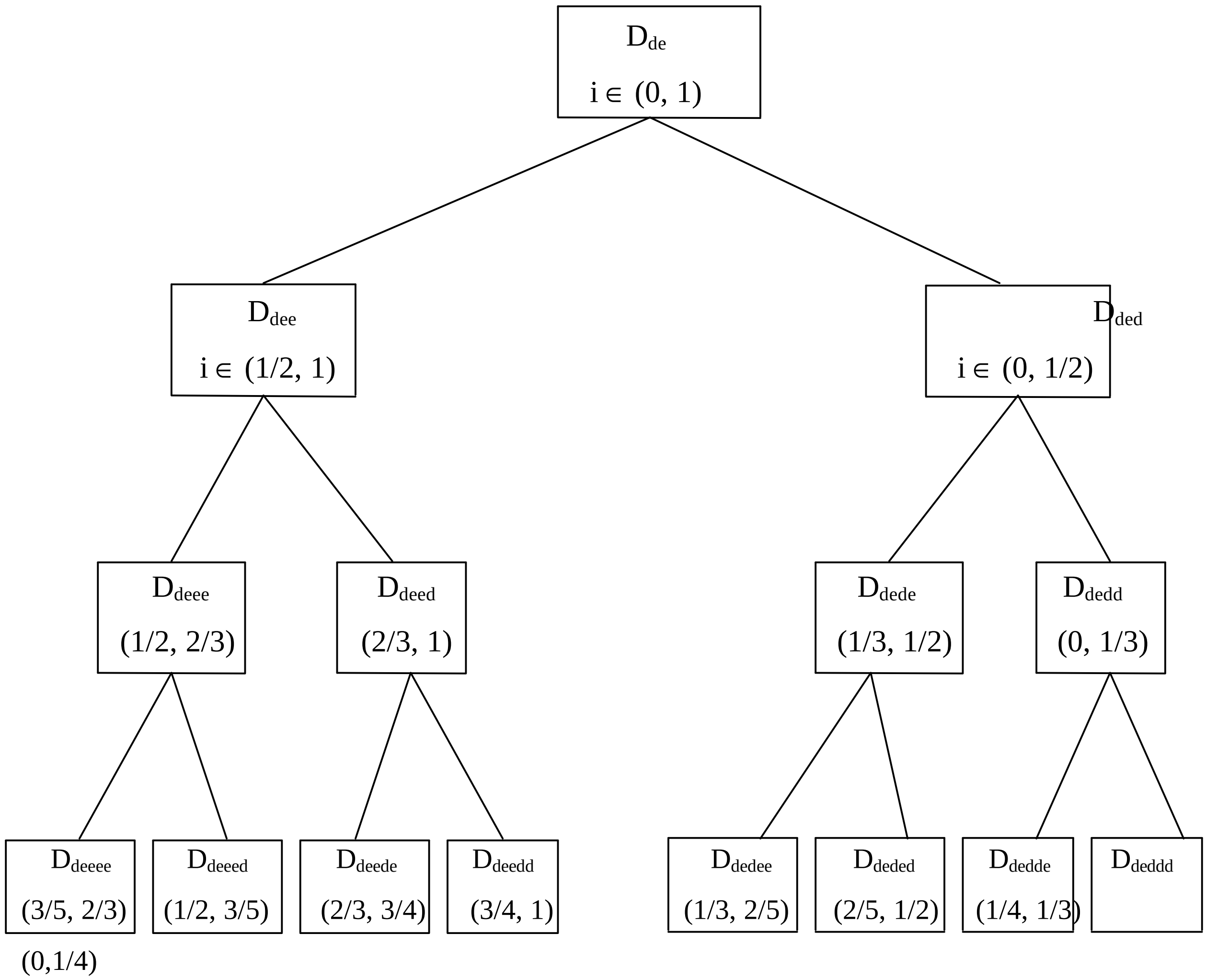
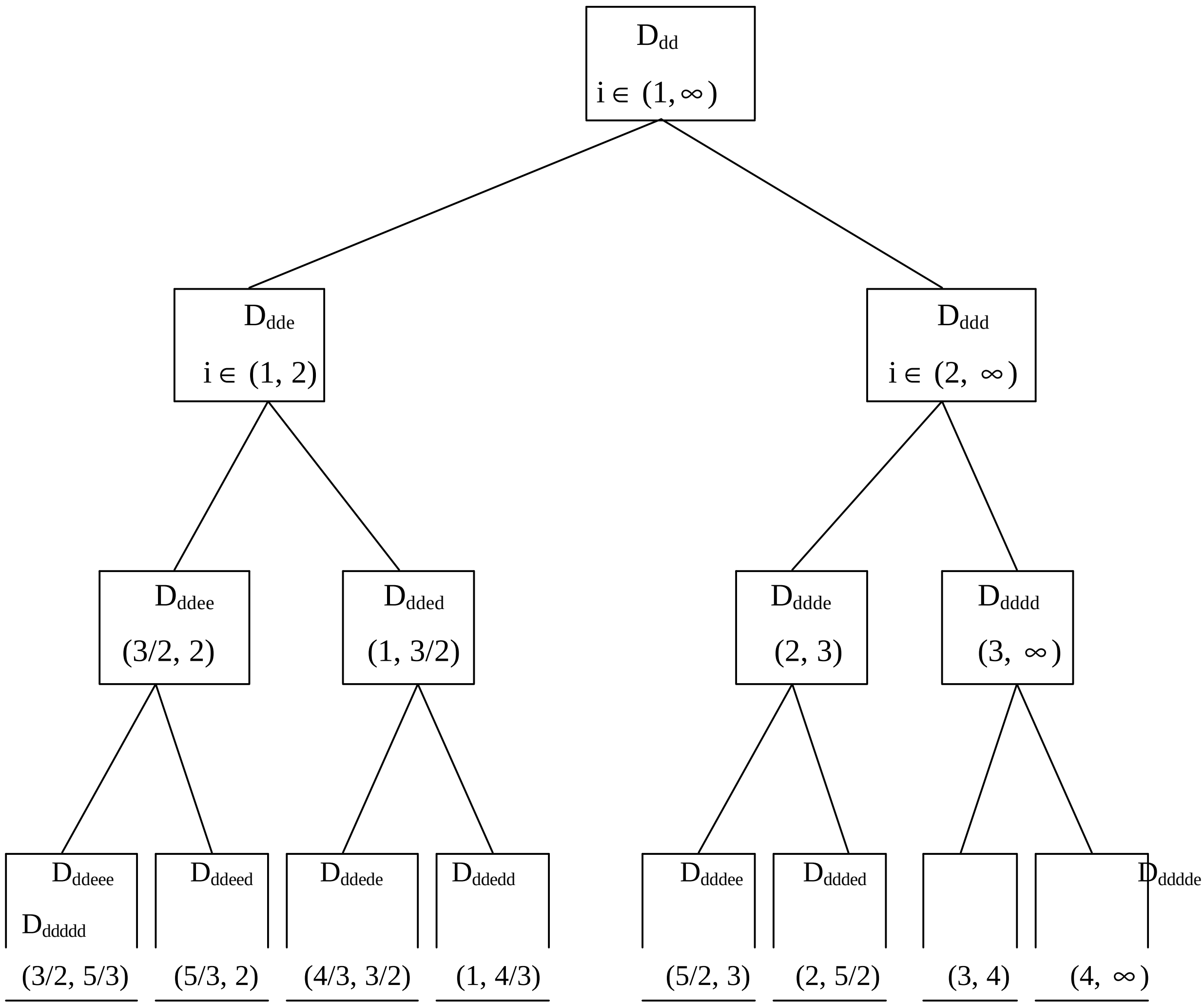


Figura II

Árvore de Níveis de Extensão a Partir de D_{dd}



5- Integração com o Método de Pratt-Hammond

Com suporte em propriedades das chamadas funções do tipo Pólya (veja-se Karlin (1957)), Hammond (1974) formulou uma condição de suficiência para a unicidade de taxas internas de retorno positivas (e simples) que consiste na determinação do número de variações de sinal em seqüências (ilimitadas) de cumulações. Mais tarde, com base em resultados apresentados em Pratt (1979), Pratt e Hammond (1979) refinaram o procedimento de modo a que, essencialmente, na sua versão finita[1] prática e mais abrangente, são construídas as n+1 primeiras cumulações, de modo a gerar a seqüência $PH_d : \{A_0^{(n+1)}, A_1^{(n+1)}, ..., A_n^{(n+1)}, A_n^{(n)}, A_n^{(n-1)}, ..., A_n^{(1)}\}$. O principal resultado, que denominaremos de condição de Pratt-Hammond, é que o número de variações de sinal em PH_d, indicado por Sinal (PH_d), provê um limite superior para o número de taxas internas de retorno positivas do projeto de investimento em questão.

Remetendo o leitor ao trabalho de Pratt (1979) para sua comprovação formal, consideremos o projeto D:{-10, 20, -50, 200, -300, 300} para fins de ilustrar a aplicação do procedimento; o que é feito no Quadro III.

Quadro III

Construção de PH_d para o Projeto D

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & \{-10, & 20, & -50, & 200, & -300, & 300\} \\
\ell = 1: & -10, & 10, & -40, & 160, & -140, & \underline{160} \\
\ell = 2: & -10, & 0, & -40, & 120, & -20, & \underline{140} \\
\ell = 3: & -10, & -10, & -50, & 70, & 50, & \underline{190} \\
\ell = 4: & -10, & -20, & -70, & 0, & 50, & \underline{240} \\
\ell = 5: & -10, & -30, & -100, & -100, & -50, & \underline{190} \\
\ell = 6: & -\underline{10}, & \underline{-40}, & \underline{-140}, & \underline{-240}, & \underline{-290}, & \underline{-100}
\end{array}
$$

Observando que D_d = {-10, -30, -70, 70, -20, 160} apresenta 3 variações de sinal, temos somente uma variação de sinal em PH_d = {-10, -40, -140, -240, -290, -100, 190, 240, 190, 140, 160}, cujos termos aparecem sublinhados no Quadro III.[2] Deste modo, muito embora a análise de somente a primeira diagonal de Vincent seja inconclusiva, o fato de que Sinal (PH_d) = 1 é suficiente para concluir-se que o projeto D possui somente uma taxa interna de retorno positiva ($i^* \cong 125{,}73\%$ por período).

O ponto a ressaltar é que, como ilustrado no caso do exemplo D, e tendo em vista o Lema 5, adiante enunciado e de demonstração trivial, a condição de suficiência de Pratt-Hammond domina a baseada na primeira diagonal de Vincent.

Lema 5

Se Sinal (D_d) = 1, então Sinal (PH_d) = 1

Por outro lado, o fato de que a condição de Pratt-Hammond não seja necessária (veja-se o caso do projeto C, para o qual Sinal (PH_d) = Sinal ({-1, 7, -8, - 22, -14, 1, 24}) = 3) nos leva a buscar como estendê-la. Ora, tendo em vista que a extensão em termos das diagonais de Vincent é feita com base em mudanças de variáveis, e que, em cada caso, está sendo estabelecido um limite superior para o número de raízes positivas do correspondente polinômio, a aplicação sucessiva do Lema 5 nos leva a sugerir uma imediata integração com o que chamaremos de borda de Pratt-Hammond. A idéia é, a cada nível de extensão no processo de construção das diagonais de Vincent, construir também, se necessário, a correspondente borda de Pratt-Hammond. Isto porque, é fácil verificar, teremos sempre, a cada nível k, Sinal (D_k) $\geq$ Sinal (PH_k).

Como ilustração, considere-se o caso do projeto E : {-2, 9, -2, -37, 58}; também estudado em Hajdasinski (1983). Temos que Sinal (D_d) = Sinal ({-2, 1, 13, -22, 26}) = 3 e

---

[1] Além do fato de que o procedimento nunca será conclusivo no caso de taxas internas únicas, mas com multiplicidades superiores a um, o tratamento de seqüências com número ilimitado de termos é um poderoso óbice a aplicações práticas.

[2] A rigor, do mesmo modo que se pode truncar a construção da diagonal de Vincent, também nem sempre é necessário fazer as n+1 cumulações. No caso, poderíamos parar na terceira cumulação, pois que se tem uma borda com somente uma variação de sinal.

também Sinal (PH_d) = Sinal ({-2, -1, 13, 18,18, 0, -5, 4, 26}) = 3. Logo, precisamos passar ao próximo nível, partindo de D_d.

Prosseguindo-se, é fácil verificar que Sinal (D_{de}) = 0, o que indica a inexistência de taxa interna positiva inferior a 100% por período. Também, como a soma dos termos de D_d é diferente de zero, temos que a taxa de 100% por período não é taxa interna de retorno. Como, todavia, Sinal (D_{dd}) = Sinal ({-2, -7, 4, -1, 16}) = 3, indicando a possibilidade de até três taxas internas de retorno superiores a 100% por período, a consideração somente do procedimento baseado nas diagonais de Vincent, nos levaria a, partindo de D_{dd}, considerar o próximo nível de extensão. Tal, porém, não é necessário, pois que Sinal (PH_{dd}) = Sinal ({-2, -9, -12, -12, 6, 18, 18, 15, 16}) = 1; o que indica a existência de exatamente uma taxa interna superior a 100% por período. Logo, ao projeto E associa-se somente uma taxa interna de retorno positiva (que é aproximadamente igual a 230,83% por período).

6. <u>Conclusão</u>

Para o caso de projetos de investimento com lucro contábil positivo e mais de duas variações de sinal em seus respectivos fluxos de caixa, a aplicação do critério da taxa interna de retorno, mesmo que restrita ao campo das taxas de juro positivas, não é garantida a priori. Para esses casos, faz-se necessário assegurar a aplicabilidade do critério via a constatação da unicidade da taxa interna de retorno; o que pode ser feito, de uma maneira expedita e sem risco de instabilidades computacionais, mediante simples adições, por meio do procedimento baseado nas diagonais de Vincent ou na metodologia de Pratt-Hammond.

No presente trabalho, considerando-se inicialmente o procedimento que se fundamenta nas chamadas diagonais de Vincent, foi apresentada uma justificativa formal de sua validade. A seguir, examinando o que se denominou de borda de Pratt-Hammond, chamando atenção para o fato de que, a cada nível, tem-se completa dominância sobre a correspondente diagonal de Vincent, foi proposta a adoção de um procedimento misto, que integra as duas metodologias baseadas em simples adições.

Referências

Alchian, Armen A., 1955. The Rate of Interest, Fisher's Rate of Return over Costs and Keynes Internal Rate of Return. The American Economic Review 15, pgs. 938-43.

Aucamp Donald C. e Walter L. Eckardt, Jr., 1976. A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return – Comment. Journal of Financial and Quantitative Analysis 11, pgs. 329-32

Bernhard, Richard H., 1967. On the Inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan Conditions for Uniqueness of the Internal Rate of Return. The Journal of Industrial Engineering 18, pgs. 499-500.

_______, 1979. A More General Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return. Journal of Financial and Quantitative Analysis 14, pgs. 337-41.

______, 1980. A Simplification and an Extension of the Bernhard-de Faro Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return. Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, pgs. 201-9.

Bezza, El Mostafa, 1984. Le concept d´intérêts cumulés : un algorithme pour dépasser le probléme de multiplicité des T.I.R. Economies et Societés 18, pgs. 99 – 132.

Bierman, Harold, Jr. e Seymour Smidt, 1993. The Capital Budgeting Decision, 8th Ed. Macmillan Publishing Co., New York.

Bodie, Zvi e Robert Merton, 1998. Finance (Preliminary Edition). Prentice – Hall, Inc., New Jersey.

Clarke, Arthur C.M., 1982. Complete Extension of the Bernhard-de Faro Test for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return. Manuscrito não publicado.

de Faro, Clovis, 1974. On the Internal Rate of Return Criterion. The Engineering Economist 19, pgs. 165-94.

_______, 1975. Sobre a Unicidade de Taxas Internas de Retorno Positivas. Revista Brasileira de Economia 29, pgs. 57-66.

________, 1978. A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return: Further Comments. Journal of Financial and Quantitative Analysis 13, pgs. 557-64.

________, 1983. O Teorema de Vincent e o Problema de Multiplicidade de Taxas Internas de Retorno. Revista Brasileira de Economia 37, pgs. 55-76.

________, 1985. A Eficiência Marginal do Capital como Critério de Avaliação Econômica de Projetos de Investimentos. IBMEC/PNPE, Rio de Janeiro.

_________ e Luiz Soares, 1978. A Flexible Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return. The Engineering Economist 23, pgs. 117-27.

de Faro, Paula M.L.D., 1998. Projetos de Investimento com Mais de Duas Variações de Sinal: Sobre a Aplicação do Teorema de Vincent e suas Extensões. Tese de Mestrado, EPGE/FGV, Rio de Janeiro.

Dybvig, Philip H., 1983. Duality, Interest Rates, and The Theory of Present Value. Journal of Economic Theory 30, pgs. 98-114.

Grant, Eugene L. e W. Grant Ireson, 1964. Principles of Engineering Economy, 4th Ed. The Ronald Press Co., New York.

Hammond, John S., III, 1974. Bouding the Numbers of Rates of Return of a Project. Trabalho apresentado no encontro nacional conjunto TIMS/ORSA, em Boston.

Hajdasinski, Miroslav M., 1983. A Complete Method for Separation of Internal Rates of Return. The Engineering Economist 28, pgs. 207-50.

Hirshleifer, J., 1958. On the Theory of Optimal Investment Decision. Journal of Political Economy 66, pgs. 329-52.

Jean, W.H., 1968. On Multiple Rates of Return. The Journal of Finance 23, pgs 187-91.

Jegers, Marc, 1986. Le concept d'intérêts cumule's: necessaire ou suffisant? Economies et Societés 20, pgs. 37-48.

Kaplan, Seymour, 1965. A Note on a Method for Precisely Determining the Uniqueness or Nonuniqueness of the Internal Rate of Return for a Proposed Investment. The Journal of Industrial Engineering 16, pgs. 70-1.

Karlin, Samuel, 1957. Polya-Type Distributions, II. Annals of Mathematical Statistics 28, pgs. 281-308.

Lonzi, Marco, 1988. Unicité du TIR et Intérêts Cumulés: un Commentaire, Economies et Societés 22, pgs. 25-36.

Lorie, J.H. e L.J. Savage, 1955. Three Problems in Capital Rationing. Journal of Business 28, pgs. 229-39.

Luenberger, David G., 1998. Investment Science. Oxford University Press, New York.

Norstrom, Carl J., 1972. A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return. Journal of Financial and Quantitative Analysis 7, pgs 1835-9.

Panton, Don B. e William A. Verdini, 1981. A FORTRAN Program for Applying Sturm's Theorem in Counting Internal Rates of Return. Journal of Financial and Quantitative Analysis 16, pgs. 381-8.

Pratt, John W., 1979. Finding How Many Roots a Polynomial Has in (0,1) or (0, ∞). American Mathematical Monthly 86, pgs. 630-7.

_________ e John S. Hammond, III, 1979. Evaluating and Comparing Projects: Simple Detection of False Alarms. The Journal of Finance 34, pgs. 1231-42.

Ross, S.A., R.W. Westerfield e J.F. Jaffe, 1993. Corporate Finance, 3rd Ed. Richard D. Irwin, Homewood.

Russell, Allen M. e John A. Rickard, 1982. Uniqueness of Non-negative Internal Rate of Return. Journal of the Institute of Actuaries 109, pgs. 435-45.

______ e _______, 1984. An Algorithm for Determining Unique Nonnegative Internal Rates of Return. Journal of Business Finance & Accounting 11, pgs. 355-65.

Soper, C.S., 1959. The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note. The Economic Journal 69, pgs. 174-7.

Teichroew, Daniel, Alexander A. Robichek e Michael Montalbano, 1965. Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty. Management Science 11, pgs. 395-403.

Uspensky, J.V., 1948. Theory of Equations. McGraw- Hill Book Co., Inc., New York.